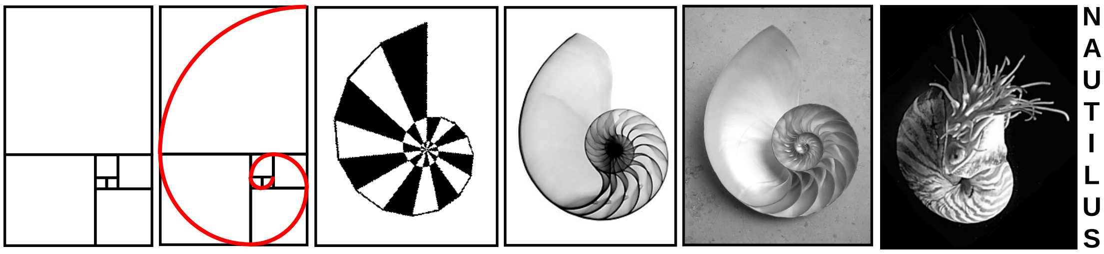
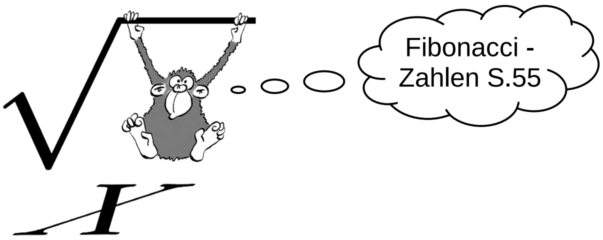


$F_0=0$, $F_1=1$ und $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ⇨ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Mathematik - Regelheft



Nautilus - Namen gebend für das berühmte U-Boot des Kapitäns Nemo aus Jules Vernes Roman "20 000 Meilen unter dem Meer" - ist ein Kopffüßler (Cephalopode), der ein kalkiges Außenskelett besitzt. Die Kopffüßler, populärer unter der Bezeichnung "Tintenfische", sind eine uralte Tiergruppe, deren erste Vertreter bereits gegen Ende des Kambriums in den damaligen Meeren auftauchten, also vor über einer halben Milliarde Jahre. Der Nautilus besitzt eine eng aufgerollte einteilige Schale, in die sich das Tier bei Gefahr zurückziehen kann. Die Tentakel, die kranzförmig am Kopf befestigt sind verweisen auf den Namen der ganzen Gruppe ("Kopffüßler"). Die Nautiliden leben alle im westlichen Pazifik und in einigen Bereichen des Indischen Ozeans, ausschließlich im tropischen Bereich und vor allem am Hang von Riffen. Normalerweise halten sich die Tiere in Tiefen von etwa 400 Metern auf, können bis zu 600 Meter tief tauchen, sie kommen jedoch nachts auch bis in eine Tiefe von 100 Metern herauf. Sie ernähren sich vor allem von Krebsen.

Gertrud Luckner
Realschule Rheinfelden

Inhaltsverzeichnis in der Seitenreihenfolge

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis

Klassenstufe 5/6
Klassenstufe 7/8
Klassenstufe 8/10

Mathematische Symbole und Bezeichnungen			
$=$	gleich	a, b, c, ...	Bezeichnungen für Strecken
$\neq$	nicht gleich, ungleich	g, h, i, ...	Bezeichnungen für Geraden
$\approx$	ungefähr gleich	A, B, C, .	Bezeichnungen für Punkte
$<$	kleiner	$\overline{AB}$	Strecke zwischen A und B bzw. Länge der Strecke zwischen A und B
$>$	größer		
$\leq$	kleiner oder gleich		
$\geq$	größer oder gleich	$g \perp h$	g steht senkrecht auf h
		⊾	rechter Winkel
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	g||h	g ist parallel zu h
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	P(2|4)	Punkt mit der x-Koordinate 2 und der y-Koordinate 4
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen		
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Bezeichnungen für Winkel bzw. Winkelgrößen
$\{\,\}, \emptyset$	Leere Menge	$\sphericalangle$ ASB	Winkel mit dem Scheitel S und dem Punkt A auf dem ersten Schenkel und dem Punkt B auf dem zweiten Schenkel
$x \in M$	x ist Element der Menge M		
$x \notin M$	x ist kein Element der Menge M		
$\|a\|$	Betrag der Zahl a Bsp. $\|-5\| = 5$; $\|+5\| = 5$	π (pi)	Kreiszahl $\pi = 3{,}14159...$

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ = $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. Man verwendet natürliche Zahlen zum Zählen und Nummerieren.

$\mathbb{Z}$ = $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen. Sie besteht aus der Menge der ganzen Zahlen und allen Brüchen.

$\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen. Sie besteht aus der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen.

Irrationale Zahlen sind alle nicht-abbrechenden, nicht-periodischen Dezimalzahlen. Dargestellt werden irrationale Zahlen, indem man die ersten Stellen angibt und die weiteren - also unendlich vielen - Stellen durch Punkte andeutet.

Bekannte irrationale Zahlen sind:

- $\sqrt{2} = 1{,}414213...$,
- die Kreiszahl $\pi = 3{,}14159...$ und
- die Eulersche Zahl $e = 2{,}718281...$

Stufenzahlen / Zehnerpotenzen

1 =	10^{0}	Eins
10 =	10^{1}	Zehn
100 =	10^{2}	Hundert
1.000 =	10^{3}	Tausend
10.000 =	10^{4}	Zehntausend
100.000 =	10^{5}	Hunderttausend
1.000.000 =	10^{6}	1 Million
10.000.000 =	10^{7}	10 Millionen
100.000.000 =	10^{8}	100 Millionen
1.000.000.000 =	10^{9}	1 Milliarde
10.000.000.000 =	10^{10}	10 Milliarden
100.000.000.000 =	10^{11}	100 Milliarden
1.000.000.000.000 =	10^{12}	1 Billion
10.000.000.000.000 =	10^{13}	10 Billionen
100.000.000.000.000 =	10^{14}	100 Billionen
1.000.000.000.000.000 =	10^{15}	1 Billiarde
10.000.000.000.000.000 =	10^{16}	10 Billiarden
100.000.000.000.000.000 =	10^{17}	100 Billiarden
1.000.000.000.000.000.000 =	10^{18}	1 Trillion

Große Zahlen

Die Stufenzahlen des Dezimalsystems lassen sich als Zehnerpotenzen mit **positiven** ganzen Exponenten übersichtlich und kurz schreiben.

Beispiele:

$10^1 = 10$ $10^6 = 1.000.000$

$10^2 = 100$ $10^9 = 1.000.000.000$

$10^3 = 1.000$ $10^n = 1$ mit n Nullen

In Verbindung mit Größen werden bestimmte Zehnerpotenzen häufig durch Vorsilben gekennzeichnet:

Potenz	Vorsilbe	Zeichen	Beispiele
10^3	Kilo	k	Kilogramm: 1 kg = 1000 g
10^6	Mega	M	Megahertz: 1 MHz = 1.000.000 Hz
10^9	Giga	G	Gigahertz: 1 GHz = 1.000.000.000 Hz

Kleine Zahlen

Die Systembrüche des Dezimalsystems lassen sich als Zehnerpotenzen mit **negativen** ganzen Exponenten übersichtlich und kurz schreiben.

Beispiele:

10^{-1}	$= 0{,}1$	10^{-6}	$= 0{,}000001$
10^{-2}	$= 0{,}01$	10^{-9}	$= 0{,}000000001$
10^{-3}	$= 0{,}001$	10^{-n}	= n Nullen vor der 1

In Verbindung mit Größen werden bestimmte Zehnerpotenzen häufig durch Vorsilben gekennzeichnet:

Potenz	Vorsilbe	Zeichen	Beispiele
10^{-1}	Dezi (= Zehntel)	d	Dezimeter: 1 dm = 0,1 m
10^{-2}	Zenti (= Hundertstel)	c	Zentimeter: 1 cm = 0,01 m
10^{-3}	Milli (= Tausendstel)	m	Milligramm: 1 mg = 0,001 g
10^{-6}	Mikro (= Millionstel)	µ	Mikrogramm: 1 µg = 0,000001 g
10^{-9}	Nano (= Milliardstel)	n	Nanogramm: 1ng = 0,000000001g

Wissenschaftliche Schreibweise

Große Zahlen werden oft als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz mit **positivem** ganzen Exponenten geschrieben. Diese Darstellung nennt man „Wissenschaftliche Schreibweise“. Beim Taschenrechner wird die Basis „10“ in der Regel nicht angezeigt.

Beispiele:

Zahl	Wissenschaftliche Schreibweise	Anzeige Taschenrechner
456.000	$4{,}56 \cdot 10^{5}$	**4.56** $^{\mathbf{05}}$
876.500.000	$8{,}765 \cdot 10^{8}$	**8.765** $^{\mathbf{08}}$

Kleine Zahlen werden oft als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz mit **negativem** ganzen Exponenten geschrieben. Diese Darstellung nennt man „Wissenschaftliche Schreibweise“. Beim Taschenrechner wird die Basis „10“ in der Regel nicht angezeigt.

Beispiele:

Zahl	Wissenschaftliche Schreibweise	Anzeige Taschenrechner
0,00789	$7{,}89 \cdot 10^{-3}$	**7.89** $^{\mathbf{-03}}$
0,00001234	$1{,}234 \cdot 10^{-5}$	**1.234** $^{\mathbf{-05}}$

Potenzen

Multipliziert man eine Zahl wiederholt mit sich selbst, so lässt sich das Produkt verkürzt schreiben:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n-\text{mal}} = a^n$$

- a heißt „Basis“ oder „Grundzahl“.
- n heißt „Exponent“ oder „Hochzahl“.
- a^n heißt „Potenz“ und wird gelesen „a hoch n“. Die ausgerechnete Potenz nennt man „Potenzwert“.

Man darf Basis und Exponent **nicht** vertauschen.

Beispiele:

Berechne die fünfte Potenz von 2.	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
Berechne die zweite Potenz von 5.	$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
Potenziere 3 mit 4 und berechne den Potenzwert.	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
Potenziere 4 mit 3 und berechne den Potenzwert.	$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Außerdem wird festgelegt:	$a^1 = a$	und	$a^0 = 1$ für $a \neq 0$
Beispiele:	$3^1 = 3$	und	$4^0 = 1$

Rechnen mit Potenzen

Für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gilt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ mit } a \neq 0 \text{ und } n > 0 \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

Potenzen mit *gleicher Basis* werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$$

Potenzen mit *gleicher Basis* werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$$

Potenzen mit *gleichen Exponenten* werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$$

Potenzen mit *gleichen Exponenten* werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält:

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$3^3 : 2^3 = (3 : 2)^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$$

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$$

Quadratwurzeln (Multiplikation / Division)

Ist a eine positive Zahl, dann bezeichnet man mit $\sqrt{a}$ diejenige positive Zahl, deren Quadrat gleich a ist:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a^2} = a$$

$\sqrt{a}$ heißt „Quadratwurzel aus a“ oder kurz „Wurzel a“.
a heißt „Radikand“.

Beispiele: $\sqrt{16} = 4$ (weil $4 \cdot 4 = 16$) $\quad \sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \sqrt{2} = 1{,}4142...$

Multiplikation	Division
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ für $b \neq 0$
Beispiele:	Beispiele:
$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$	$\sqrt{\frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{4{,}5} = \sqrt{2 \cdot 4{,}5} = \sqrt{9} = 3$	$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

Wurzeln zusammenfassen / teilweises Wurzelziehen

Zusammenfassen von Wurzeln mit gleichen Radikanden:
Sind in einer Summe die Summanden Produkte aus Zahlen und Quadratwurzeln, so lässt sich bei **gleichen** Radikanden die Summe vereinfacht schreiben.

$$a \cdot \sqrt{x} + b \cdot \sqrt{x} = (a + b) \cdot \sqrt{x} \qquad a \cdot \sqrt{x} - b \cdot \sqrt{x} = (a - b) \cdot \sqrt{x}$$

Beispiele:

$$3 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5} = (3 + 4) \cdot \sqrt{5} = 7 \cdot \sqrt{5}$$

$$4 \cdot \sqrt{6} + 5 \cdot \sqrt{7} + 3 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{6} = (4 - 1) \cdot \sqrt{6} + (5 + 3) \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{6} + 8 \cdot \sqrt{7}$$

Teilweises Wurzelziehen:
Lässt sich der Radikand als Produkt aus einer Quadratzahl und einer anderen Zahl schreiben, so kann die Wurzel vereinfacht geschrieben werden nach der Regel:

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 \cdot c} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{c} = b \cdot \sqrt{c}$$

Beispiele:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\tfrac{75}{9}} = \sqrt{\tfrac{25}{9} \cdot 3} = \sqrt{\tfrac{25}{9}} \cdot \sqrt{3} = \tfrac{5}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} + \sqrt{12} &= \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= 5 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 7 \cdot \sqrt{3}\end{aligned}$$

Größen

Eine **Größe** besteht aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit.

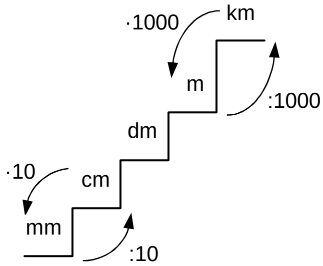
7 kg
↑ ↑
Maßzahl Maßeinheit

Besteht die Maßeinheit aus mehreren Maßeinheiten, so spricht man von einer **zusammengesetzten Größe**.

$80 \ \frac{km}{h}$
↑ ↑
Maßzahl zusammengesetzte
Maßeinheit (Geschwindigkeit)

Längenmaße

Standardmaße:



		1 mm	Millimeter
10 mm	=	1 cm	Zentimeter
10 cm	=	1 dm	Dezimeter
10 dm	=	1 m	Meter
1.000 m	=	1 km	Kilometer

Die Umrechnungszahl bei den benachbarten Längenmaßen ist 10, zwischen m und km ist sie 1.000.

Beispiele:

0,08 km = 80 m = 800 dm = 8.000 cm = 80.000 mm
340 mm = 34 cm = 3,4 dm = 0,34 m = 0,00034 km
3,04572 km = 3 km 45 m 7 dm 2 cm
7 m 3 cm = 7,03 m = 70,3 dm = 703 cm = 7.030 mm

Andere Maße:

Seemeile:	1 sm = 1.852 m	(international)
inch, Zoll:	1 in = 1'' = 25,4 mm	(GB, USA)
foot, Fuß:	1 ft = 1' = 12'' = 30,48 cm	(GB, USA)
yard, Elle:	1 yd = 3 ft = 91,44 cm	(GB, USA)
mile, Meile:	1 mile = 1.760 yds. = 1.609,3 m	(GB, USA)

Maßstab

Der Maßstab gibt an, wie vielmal größer oder kleiner die Strecken in Wirklichkeit sind.

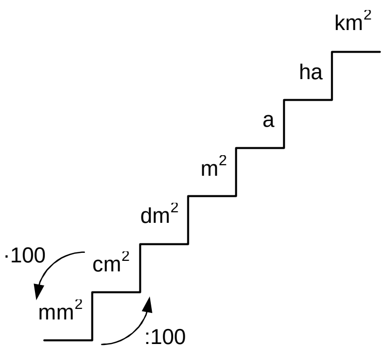
Der Maßstab 1 **:** n bedeutet: Jede Strecke ist in Wirklichkeit n mal so groß. Beispiele: Ist auf einer Bauzeichnung im Maßstab 1 **:** 100 eine Strecke 4 cm lang, so ist sie in Wirklichkeit 4 cm · 100 = 400 cm = 4 m lang. Ist eine Strecke in Wirklichkeit 300 m (= 30.000 cm) lang, so ist sie in einer Zeichnung im Maßstab 1 **:** 10.000 genau 30.000 cm **:** 10.000 = 3 cm lang.	Der Maßstab n **:** 1 bedeutet: Jede Strecke ist in Wirklichkeit n mal so klein. Beispiele: Ist im Biologiebuch eine Abbildung im Maßstab 20 **:** 1, so ist ein dort abgebildetes 6 cm großes Tier in Wirklichkeit 6 cm **:** 20 = 0,3 cm = 3 mm groß. Ist ein Tier in Wirklichkeit 17 mm groß (= 1,7 cm), so ist es in einer Abbildung im Maßstab 10 **:** 1 genau 1,7 cm · 10 = 17 cm groß.

wichtige Maßstäbe:

	1 : 100	1 : 1.000	1 : 10.000	1 : 25.000	1 : 100.000
1 cm	1 m	10 m	100 m	250 m	1 km

Flächenmaße

		1 mm^2	Quadratmillimeter
100 mm^2	=	1 cm^2	Quadratzentimeter
100 cm^2	=	1 dm^2	Quadratdezimeter
100 dm^2	=	1 m^2	Quadratmeter
100 m^2	=	1 a	Ar
100 a	=	1 ha	Hektar
100 ha	=	1 km^2	Quadratkilometer



Die Umrechnungszahl bei den benachbarten Flächenmaßen ist 100.

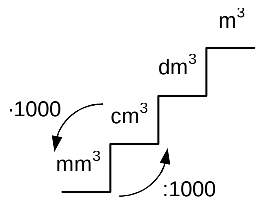
Beispiele:

0,02 km^2 = 2 ha = 200 a = 20.000 m^2
670 mm^2 = 6,7 cm^2 = 0,067 dm^2 = 0,00067 m^2
3,06574 km^2 = 3 km^2 6 ha 57 a 40 m^2
3 m^2 8 cm^2 = 3,0008 m^2 = 300,08 dm^2

Raummaße / Hohlmaße (Volumen)

Raummaße:

		1 mm^3	Kubikmillimeter
1.000 mm^3	=	1 cm^3	Kubikzentimeter
1.000 cm^3	=	1 dm^3	Kubikdezimeter (= 1 Liter)
1.000 dm^3	=	1 m^3	Kubikmeter (= 1.000 Liter)



Die Umrechnungszahl bei den benachbarten Raummaßen ist 1000.

Beispiele:

0,07 m^3 = 70 dm^3 = 70.000 cm^3 = 70.000.000 mm^3
890 mm^3 = 0,89 cm^3 = 0,00089 dm^3 = 0,00000089 m^3
5,03685 m^3 = 5 m^3 36 dm^3 850 cm^3
9 m^3 7 cm^3 = 9,000007 m^3 = 9.000,007 dm^3

Hohlmaße:

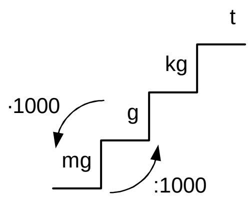
		1 ml	Milliliter	1 ml = 1 cm^3
10 ml	=	1 cl	Zentiliter	
10 cl	=	1 dl	Deziliter	
10 dl	=	1 l	Liter	1 l = 1 dm^3
100 l	=	1 hl	Hektoliter	
10 hl	=	1 m^3	Kubikmeter	1 m^3 = 1.000 l

Raummaße, die man zum Messen von Flüssigkeiten benutzt, heißen auch Hohlmaße

Gewichtsmaße

Der hier verwendete Begriff „Gewicht“ ist umgangssprachlich und bezeichnet die Größe, die in der Physik „Masse“ genannt wird.
Standardmaße:

		1 mg	Milligramm
1.000 mg	=	1 g	Gramm
1.000 g	=	1 kg	Kilogramm
1.000 kg	=	1 t	Tonne



Die Umrechnungszahl bei den benachbarten Gewichtsmaßen ist 1000.

Beispiele:

0,3 t = 300 kg = 300.000 g = 300.000.000 mg
750 mg = 0,75 g = 0,00075 kg = 0,00000075 t
2,05703 t = 2 t 57 kg 30 g
40 t 90 kg = 40.090 kg = 40,09 t

andere Maße:

Pfund:	1 Pfd.	=	500 g	(Deutschland)
Zentner:	1 Ztr.	=	50 kg	(Deutschland)
Karat:	1 k = 1 c	=	200 mg	(international)
ounce, Unze:	1 oz	=	28,35 g	(GB, USA)
pound, Pfund:	1 lb = 16 oz	=	453,6 g	(GB, USA)

Zeiteinheiten / Zeitspannen

		1 s	Sekunde
60 s	=	1 min	Minute
60 min	=	1 h	Stunde
24 h	=	1 d	Tag
365 d	=	1 a	Jahr (1 Schaltjahr hat 366 Tage)

Bei Zeiteinheiten ist die Umrechnungszahl unterschiedlich.

im **Bankwesen** gilt: 1 Monat hat 30 Tage, 1 Jahr hat 360 Tage

Beispiele:

6 a = 6 · 365 d = 2.190 d = 2.190 · 24 h = 52.560 h

7 h = 7 · 60 min = 420 min = 420 · 60 s = 25.200 s

3 d + 7 h = 3 · 24 h + 9 h = 72 h + 9 h = 81 h

$184\text{ h} = 184 \cdot \frac{1}{24}\text{ d} = \frac{184}{24}\text{ d} = 7\frac{16}{24}\text{ d} = 7\text{ d}\,16\text{ h}$

$48\text{ min} = 48 \cdot \frac{1}{60}\text{ h} = \frac{48}{60}\text{ h} = \frac{8}{10}\text{ h} = 0{,}8\text{ h}$

0,4 min = 0,4 · 60 s = 24 s

8,4 min = 8 min + 0,4 min = 8 min 24 s

0,4 d = 0,4 · 24 h = 9,6 h = 9 h + 0,6 · 60 min = 9 h 36 min

Rechnen mit Zeitspannen

Beim Rechnen mit Zeitspannen werden zusammengesetzte Einheiten **getrennt** berechnet.

Beispiele zur Addition:

```
   3 h 15 min
+  2 h 13 min
+  7 h 24 min
  12 h 52 min
```

Beim Addieren muß man oft **nach** dem Ausrechnen in größere Einheiten umwandeln:

```
  13 d 17 h
+ 40 d 22 h
  53 d 39 h = 54 d 15 h
```

Beispiele zur Subtraktion:

```
  16 h 52 min
–  2 h 24 min
–  5 h 17 min
   9 h 11 min
```

Beim Subtrahieren muß man oft **vor** dem Ausrechnen in kleinere Einheiten umwandeln:

```
  54 d 15 h   =    53 d 39 h
– 13 d 17 h      – 13 d 17 h
                   40 d 22 h
```

Addition

Summand + Summand = Wert der Summe

$$\underbrace{32 + 16}_{\text{Summe}} = 48$$

Sprechweisen:

	32 plus 16 ist 48.
oder:	48 ist die Summe von 32 und 16.
oder:	Die Summe von 32 und 16 ist 48.

Man darf die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

Beispiele:

Addiere 2 zu 7.	7 + 2 = 9
Berechne die Summe von 5 und 3.	5 + 3 = 8
Ein Summand heißt 2, der andere 3.	
Wie groß ist die Summe?	2 + 3 = 5

Subtraktion

Minuend – Subtrahend = Wert der Differenz

$$\underbrace{48 - 16}_{\text{Differenz}} = 32$$

Minuend:	Zahl, von der etwas abgezogen werden soll.
Subtrahend:	abzuziehende Zahl
Differenz:	Unterschied

Sprechweisen:

	48 minus 16 ist 32.
oder:	32 ist die Differenz von 48 und 16.
oder:	Die Differenz von 48 und 16 ist 32.

Man darf Minuend und Subtrahend **nicht** vertauschen.

Beispiele:

Subtrahiere 4 von 9.	9 – 4 = 5
Berechne die Differenz von 8 und 5.	8 – 5 = 3
Der Minuend heißt 7, der Subtrahend 3.	
Wie groß ist die Differenz?	7 – 3 = 4

Multiplikation

$$\underbrace{\text{Faktor} \cdot \text{Faktor}}_{} = \text{Wert des Produktes}$$

$$\underbrace{6 \cdot 12}_{\text{Produkt}} = 72$$

Sprechweisen:

6 mal 12 ist 72.

oder: 72 ist das Produkt von 6 und 12.

oder: Das Produkt von 6 und 12 ist 72.

Man darf die Reihenfolge der Faktoren vertauschen.

Beispiele:

Multipliziere 7 mit 3.	$7 \cdot 3 = 21$
Berechne das Produkt von 3 und 8.	$3 \cdot 8 = 24$
Ein Faktor heißt 9, der andere 3. Wie groß ist das Produkt?	$9 \cdot 3 = 27$

Division

$$\text{Dividend} : \text{Divisor} = \text{Wert des Quotienten}$$

$$\underbrace{72 : 6}_{\text{Quotient}} = 12$$

Dividend: Zahl, die geteilt werden soll.

Divisor: Zahl, durch die geteilt wird.

Quotient: Ergebnis einer Division.

Sprechweisen:

72 geteilt durch 6 ist 12.

oder: 12 ist der Quotient von 72 und 6.

oder: Der Quotient von 72 und 6 ist 12.

Man darf Dividend und Divisor **nicht** vertauschen.
Durch 0 kann man **nicht** dividieren.

Beispiele:

Dividiere 27 durch 9.	$27 : 9 = 3$
Berechne den Quotienten von 36 und 4.	$36 : 4 = 9$
Der Dividend heißt 14, der Divisor 2. Wie groß ist der Quotient?	$14 : 2 = 7$

Quersumme / Teilbarkeitsregeln / Primzahlen / Primzahlzerlegung	
Unter Quersumme versteht man die Summe aller Ziffern einer (natürlichen) Zahl. Beispiele:	
Quersumme von 508: 5 + 0 + 8 **=** 13	Quersumme von 4.873: 4 + 8 + 7 + 3 = 22
Eine Zahl ist teilbar durch ... ... 2, wenn ihre letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. ... 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. ... 4, wenn die Zahl aus ihren letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist. ... 5, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist. ... 6, wenn die Zahl durch 2 und 3 teilbar ist. ... 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.	
Eine Zahl, die genau **zwei** Teiler hat, heißt Primzahl. Beispiele: 2 und 3 sind Primzahlen: $T_2 = \{1, 2\}$ $T_3 = \{1, 3\}$ 1 und 4 sind **keine** Primzahlen: $T_1 = \{1\}$ $T_4 = \{1, 2, 4\}$	
Wenn man eine Zahl in Faktoren zerlegt, die alle Primzahlen sind, dann erhält man die **Primzahlzerlegung** der Zahl. Beispiel: $1960 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$	

Brüche	
Bruch: Bruchstrich $\longrightarrow \frac{\text{Zähler} \rightarrow}{\text{Nenner} \rightarrow}$	$\frac{2}{3}$
echter Bruch: Zähler < Nenner:	$\frac{5}{8}$
unechter Bruch: Zähler > Nenner:	$\frac{7}{5}$
Jeder unechte Bruch lässt sich auch als gemischte Zahl schreiben:	$\frac{21}{5} = 4\frac{1}{5} \left[\frac{21}{5} = 21:5 = 4 \text{ Rest } 1 \text{ zum Divisor } 5\right]$
Jede gemischte Zahl lässt sich auch als unechter Bruch schreiben:	$7\frac{2}{3} = 7 + \frac{2}{3} = \frac{7}{1} + \frac{2}{3} = \frac{21}{3} + \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$

Kehrwert (Kehrbruch): Vertauscht man Zähler und Nenner eines Bruches, so erhält man seinen „Kehrwert“ oder „Kehrbruch“.

Die Zahl 0 hat keinen Kehrwert.

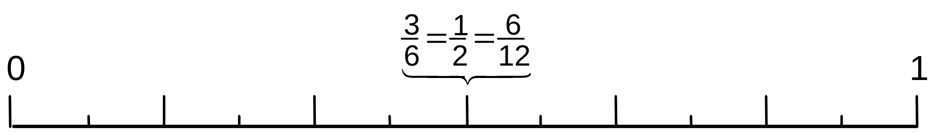
Beispiele:

	Bruch	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{18}$	$\frac{1}{7}$	$8\left(=\frac{8}{1}\right)$	
	Kehrwert	$\frac{5}{3}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{7}{1} = 7$	$\frac{1}{8}$	

Erweitern und Kürzen

Erweitern	**Kürzen**
Multipliziert man Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben natürlichen Zahl ($\neq 0$), so spricht man vom „Erweitern“.	Dividiert man Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe natürliche Zahl ($\neq 0$), so spricht man vom „Kürzen“.
Beispiel:	Beispiel:
$\frac{3}{5}$ erweitert mit 2:	$\frac{10}{15}$ gekürzt mit 5:
$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$	$\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$

Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, heißen „gleichwertig“. Sie stellen auf dem Zahlenstrahl dieselbe Bruchzahl dar.



Addition / Subtraktion von Brüchen

Brüche mit gleichen Nennern heißen „gleichnamig“.

Addition

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

Subtraktion

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.

$$\frac{7}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

Brüche mit verschiedenen Nennern heißen „ungleichnamig“.

Addition

Um ungleichnamige Brüche zu addieren, werden diese zunächst auf einen gemeinsamen Nenner erweitert und dadurch gleichnamig gemacht. Der kleinste gemeinsame Nenner wird **Hauptnenner** (HN) genannt.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$$

Subtraktion

Um ungleichnamige Brüche zu subtrahieren, werden diese zunächst auf einen gemeinsamen Nenner erweitert und dadurch gleichnamig gemacht. Der kleinste gemeinsame Nenner wird **Hauptnenner** (HN) genannt.

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=\frac{2}{15}$$

Multiplikation von Brüchen / Division durch Brüche

Multiplikation

Zwei Brüche werden multipliziert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert wird (falls möglich vorher kürzen):

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

Ist ein Faktor eine natürliche Zahl, so wird diese als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben:

$$7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{1\cdot 5}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$$

Ist ein Faktor eine gemischte Zahl, so wird diese zuerst in einen unechten Bruch verwandelt:

$$5\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{23}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{23\cdot 2}{4\cdot 7}=\frac{46}{28}=\frac{23}{14}=1\frac{9}{14}$$

Division

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert:

aus „ **:** “ wird „ **·** “

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{14}{15}$$

Kehrwert

Ist der Divisor eine natürliche Zahl, so wird diese als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben:

$$\frac{3}{7}:6=\frac{3}{7}:\frac{6}{1}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 1}{7\cdot 6}=\frac{3}{42}$$

Ist der Divisor eine gemischte Zahl, so wird diese zuerst in einen unechten Bruch verwandelt:

$$\frac{2}{5}:6\frac{3}{4}=\frac{2}{5}:\frac{27}{4}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{27}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 27}=\frac{8}{135}$$

Dezimalzahlen / Dezimalbrüche

Kommazahlen nennt man auch Dezimalzahlen.

Vor dem Komma stehen die Ganzen, nach dem Komma die Bruchteile (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, ...). Die Bruchteile werden auch Dezimalen genannt.

Ganze			,	Bruchteile		
100	10	1	,	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Hunderter	Zehner	Einer	,	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
		0	,	5		
		2	,	3	5	
1	7	8	,	4	9	3

Von der Bruchschreibweise zur Dezimalschreibweise

Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, bezeichnet man als „Zehnerbrüche“ oder „Dezimalbrüche“. Alle Zehnerbrüche lassen sich als „endliche“ oder „abbrechende“ Dezimalzahl schreiben. Die Stellen hinter dem Komma heißen „Dezimalen“.

	Einer	,	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
$\frac{4}{10}$	0	,	4		
$\frac{3}{1000}$	0	,	0	0	3
$2\frac{5}{100}$	2	,	0	5	

Man kann genau solche Brüche in Zehnerbrüche umwandeln, bei denen nach vollständigem Kürzen der Nenner nur die Primfaktoren 2 und/oder 5 enthält.

	Einer	,	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25$	0	,	2	5	
$\frac{42}{30}=\frac{14}{10}=1{,}4$	1	,	4		
$\frac{99}{15}=\frac{33}{5}=\frac{66}{10}=6{,}6$	6	,	6		

Periodische Dezimalzahlen	
Dividiert man den Zähler eines Bruches durch den Nenner, so kann zweierlei passieren (Bruchstrich und Divisionszeichen haben die gleiche Bedeutung): • Die Division geht auf. In diesem Fall lässt sich der Bruch als „endliche“ oder „abbrechende“ Dezimalzahl schreiben: $\frac{1}{8} = 1:8 = 0{,}125$ • Die Division geht **nicht** auf. In diesem Fall wiederholt sich eine Ziffernfolge („Periode“) unendlich oft. Dies drückt man dadurch aus, dass man die erste Periode hinter dem Komma mit einer Linie überstreicht. Dezimalbrüche, die sofort nach dem Komma mit der Periode beginnen, heißen **reinperiodische Dezimalbrüche**:	
$\frac{1}{3} = 1:3 = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$ [„Null Komma Periode drei“]	$\frac{1}{99} = 1:99 = 0{,}010101... = 0{,}\overline{01}$ [„Null Komma Periode null eins“]
Dezimalbrüche, die nicht sofort nach dem Komma mit der Periode beginnen, heißen **gemischtperiodische Dezimalbrüche**:	
$\frac{5}{6} = 5:6 = 0{,}8333... = 0{,}8\overline{3}$ [„Null Komma acht Periode drei“]	$\frac{19}{44} = 19:44 = 0{,}431818... = 0{,}43\overline{18}$ [„Null Komma vier drei Periode eins acht“]

<table>
<tr><th colspan="4">Runden von Zahlen</th></tr>
<tr><td colspan="4">Beim Runden wird eine Zahl durch einen Näherungswert ersetzt. Man verbindet die Zahl mit ihrem Näherungswert durch das Zeichen „≈“, gelesen „ist ungefähr gleich“. Die Aufgabenstellung bestimmt, wie weitreichend eine Zahl zu runden ist.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Liegt die zu rundende Stelle fest, betrachtet man die nächste Ziffer:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ist die nächste Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, wird abgerundet: die Ziffer an der Rundungsstelle bleibt unverändert.
Steht die Rundungsstelle</td><td colspan="2">Ist die nächste Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9, wird aufgerundet: die Ziffer an der Rundungsstelle wird um 1 erhöht.
Steht die Rundungsstelle</td></tr>
<tr><td>vor dem Komma, werden alle folgenden Ziffern durch Nullen ersetzt.</td><td>nach dem Komma, werden alle folgenden Ziffern weggelassen.</td><td>vor dem Komma, werden alle folgenden Ziffern durch Nullen ersetzt.</td><td>nach dem Komma, werden alle folgenden Ziffern weggelassen.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Eine zwei- oder mehrfache Rundung ist unzulässig. Die Rundung 26.449 ≈ 26.450 ≈ 26.500 ≈ 27.000 ist unzulässig, weil 26.449 ≈ 26.000.
Bei längeren Rechnungen sollte erst das Endergebnis gerundet werden.
Man muss unterscheiden, ob auf eine gegebene Stelle oder auf eine bestimmte Anzahl geltender Ziffern zu runden ist.</td></tr>
</table>

Runden auf Stellenwerte

Beim Runden auf einen bestimmten Stellenwert ist der gesuchte Näherungswert

- der nächstgrößere oder nächstkleinere Zehner, Hunderter, Tausender, ...
  - je nachdem, auf welche Stelle zu runden ist - oder
- die nächstgrößere oder nächstkleinere Dezimalzahl, deren letzte Stelle Zehntel, Hundertstel Tausendstel, ... sind - je nachdem, auf welche Stelle zu runden ist.

Beispiele:

	Zu runden ist auf:		
Zahl	Zehner	Hunderter	Tausender
2.478	2.480	2.500	2.000
2.903	2.900	2.900	3.000
9.797	9.800	9.800	10.000

	Zu runden ist auf:		
Zahl	Tausendstel	Hundertstel	Zehntel
2,2748	2,275	2,27	2,3
8,0472	8,047	8,05	8,0
0,9798	0,980	0,98	1,0

Runden auf geltende Ziffern

Die **erste** geltende Ziffer einer Zahl ist - von links aus - die erste von Null verschiedene Ziffer der Zahl. Rechts daneben steht die zweite geltende Ziffer usw.

Beim Runden auf n geltende Ziffern wird auf die n-te geltende Ziffer gerundet.
Es wird also von vorne die Anzahl der Ziffern abgezählt. Führende Nullen bei Dezimalzahlen werden nicht berücksichtigt.

Beispiele:

	Zu runden ist auf:		
Zahl	3 geltende Ziffern	2 geltende Ziffern	1 geltende Ziffer
64.503	64.500,0	65.000	60.000
8,027	8,03	8,0	8
0,01896	0,0190	0,019	0,02

Addition / Subtraktion von Dezimalzahlen

Addition

Beim Addieren werden die Dezimalzahlen zuerst stellenrichtig (Komma unter Komma) untereinander geschrieben. Dann wird von rechts nach links beginnend addiert.

243,6801 + 59,77

```
               243,6801
             + 59,7700
Übertrag:      111 1
               303,4501
```

Subtraktion

Beim Subtrahieren werden die Dezimalzahlen zuerst stellenrichtig (Komma unter Komma) untereinander geschrieben. Dann wird von rechts nach links beginnend subtrahiert.

17,84 – 9,56331

```
               17,84000
             – 9,56331
Übertrag:      1  1111
                8,27669
```

Multiplikation von Dezimalzahlen

Die Multiplikation mit Zehnerpotenzen erfolgt durch Kommaverschiebung.

Bei Multiplikation mit 10, 100, 1000, ... wird das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts verschoben.

Beispiele:

```
1,2   ·   10 =   12
1,823 ·  100 =  182,3
1,37  · 1000 = 1370
```

Treten keine Zehnerpotenzen auf, verfährt man bei der Multiplikation zunächst wie bei der Multiplikation natürlicher Zahlen. Bei der abschließenden Kommasetzung ist darauf zu achten, dass das Produkt genauso viele Nachkommastellen (Dezimalen) hat wie **beide** Faktoren zusammen.

Beispiel:

```
            //     ///
           5,45 · 8,217
                4360
                 1090
                   545
                   3815
Übertrag:          11
             44,78265
                 \\\\\
```

Division: Dezimalzahl durch natürliche Zahl

Die Division durch Zehnerpotenzen erfolgt durch Kommaverschiebung.

Bei Division durch 10, 100, 1000, ... wird das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach links verschoben.

Beispiele:

```
 123       :   10 = 12,3
 182,3     :  100 =  1,823
   0,0356 : 1000 =  0,0000356
```

```
64,265 : 5 = 12,853
5
14
10
 42
 40
  26
  25
   15
   15
    0
```

Überschreitet man beim Dividieren das Komma, so wird im Ergebnis ein Komma gesetzt.

Division: Dezimalzahl durch Dezimalzahl

Ist der Teiler (Divisor) eine Dezimalzahl, so muss bei beiden Zahlen das Komma um gleich viele Stellen nach rechts verschoben werden, so dass der Teiler eine natürliche Zahl wird.

```
46,4 : 0,8 = 464 : 8 = 58
             40
              64
              64
               0
```

```
7,32 : 0,4 = 73,2 : 4 = 18,3
             4
             33
             32
              12
              12
               0
```

```
19,5 : 0,65 = 1950 : 65 = 30
              195
                 0
                 0
                 0
```

```
0,0272 : 0,17 = 2,72 : 17 = 0,16
                0
                27
                17
                102
                102
                  0
```

Gegenzahl / Betrag

Spiegelt man eine Zahl a am Nullpunkt, so erhält man ihre „Gegenzahl – a".

Ist a positiv, so ist – a negativ.

Ist a negativ, so ist – a positiv.

Die Gegenzahl von 0 ist 0.

Beispiele:

	Zahl	6	– 2	1,7	$-\frac{1}{4}$	
	Gegenzahl	– 6	2	– 1,7	$\frac{1}{4}$	

|a| (gelesen: „Betrag von a") ist der Abstand einer Zahl a vom Nullpunkt.
Eine Zahl und ihre Gegenzahl haben den gleichen Betrag.

Beispiele:

$|7| = 7$ $\qquad |-3| = 3$ $\qquad |0| = 0$

Der Betrag einer Zahl ist immer positiv oder Null.

Addition / Subtraktion von rationalen Zahlen

Addition

Zwei rationale Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und das gemeinsame Vorzeichen setzt.

Beispiele:

$(+8) + (+5) = +13$
$(-8) + (-5) = -13$

Zwei rationale Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man den kleineren Betrag vom größeren Betrag subtrahiert und das Vorzeichen der Zahl setzt, die den größeren Betrag hat.

Beispiele:

$(+8) + (-5) = +3$
$(-8) + (+5) = -3$

Subtraktion

Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert.

Beispiele:

$(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = +3$
$(+8) - (-5) = (+8) + (+5) = +13$
$(-8) - (-5) = (-8) + (+5) = -3$
$(-8) - (+5) = (-8) + (-5) = -13$

Multiplikation / Division von rationalen Zahlen	
Multiplikation	**Division**
Zwei rationale Zahlen werden multipliziert, indem man zunächst ihre Beträge multipliziert. Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen haben. $(+8) \cdot (+7) = +56$ $(-8) \cdot (-7) = +56$ Das Produkt ist negativ, wenn beide Faktoren verschiedene Vorzeichen haben. $(+8) \cdot (-7) = -56$ $(-8) \cdot (+7) = -56$ Für ein Produkt aus mehreren Faktoren gilt: Ist die Anzahl negativer Faktoren ungerade, dann ist das Produkt negativ, sonst ist es positiv.	Zwei rationale Zahlen werden dividiert, indem man zunächst ihre Beträge dividiert. Der Quotient ist positiv, wenn Dividend und Divisor das gleiche Vorzeichen haben. $(+40) : (+5) = +8$ $(-40) : (-5) = +8$ Der Quotient ist negativ, wenn Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben. $(+40) : (-5) = -8$ $(-40) : (+5) = -8$

Vorzeichenregeln (Übersicht)	
Addition $(+3) + (+4) = 3 + 4 = 7$ $(-3) + (+4) = -3 + 4 = 1$ $(+3) + (-4) = 3 - 4 = -1$ $(-3) + (-4) = -3 - 4 = -7$	**Subtraktion** $(+3) - (+4) = 3 - 4 = -1$ $(-3) - (+4) = -3 - 4 = -7$ $(+3) - (-4) = 3 + 4 = 7$ $(-3) - (-4) = -3 + 4 = 1$
Multiplikation $(+3) \cdot (+4) = 12$ $(-3) \cdot (-4) = 12$ $(+3) \cdot (-4) = -12$ $(-3) \cdot (+4) = -12$	**Division** $(+12) : (+4) = 3$ $(-12) : (-4) = 3$ $(+12) : (-4) = -3$ $(-12) : (+4) = -3$

Rechenvereinbarungen

Rechenarten gleicher Stufe sind:
1. Stufe: Addieren und Subtrahieren (Strichrechnung)
2. Stufe: Multiplizieren und Dividieren (Punktrechnung)

Kommen in einem Rechenausdruck nur Rechenarten gleicher Stufe vor, so wird „von links nach rechts“ gerechnet, wenn durch Klammern nichts anderes festgelegt ist.

Beispiele:

$4 + 6 - 3 + 8 = 10 - 3 + 8 = 7 + 8 = 15$

$5 \cdot 12 : 10 : 3 = 60 : 10 : 3 = 6 : 3 = 2$

Kommen in einem Rechenausdruck Rechenarten verschiedener Stufen vor und ist die Reihenfolge nicht durch Klammern festgelegt, dann gilt:

Punktrechnung geht vor Strichrechnung.
Potenzrechnung geht vor Punktrechnung.

Beispiele:

$4 \cdot 7 - 16 : 8 = 28 - 2 = 26$

$3 \cdot 2^{5} = 3 \cdot 32 = 96$

$18 + 48 : 2^{4} = 8 + 48 : 16 = 18 + 3 = 21$

Klammern / Klammern auflösen (in Summen und Differenzen)

Kommen in einem Rechenausdruck Klammern vor, so werden diese zuerst berechnet. Bei verschachtelten Klammern wird die innere Klammer zuerst berechnet.

Beispiele:

$5 \cdot (17 - 14) = 5 \cdot 3 = 15$ $\quad 25 - (12 - (6 - 4)) = 25 - (12 - 2) = 25 - 10 = 15$

$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ $\quad \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$ $\quad 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$

Steht vor einer eingeklammerten Summe oder Differenz ein **Pluszeichen**, so kann die Klammer weggelassen werden:

$a + (b + c) = a + b + c$
$a + (b - c) = a + b - c$

Beispiele:
$3 + (52 + 29) = 3 + 52 + 29 = 84$
$3 + (52 - 29) = 3 + 52 - 29 = 26$

Steht vor einer eingeklammerten Summe oder Differenz ein **Minuszeichen**, so kann die Klammer weggelassen werden, wenn gleichzeitig die Vorzeichen und Rechenzeichen in der Klammer umgekehrt werden:

$a - (b + c) = a - b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

Beispiele:
$97 - (56 + 38) = 97 - 56 - 38 = 3$
$97 - (56 - 38) = 97 - 56 + 38 = 79$

Terme / Termvereinbarungen

Terme sind Summen (a + b), Differenzen (a – b), Produkte (a · b) und Quotienten (a **:** b). Variable stehen in Termen anstelle von Zahlen. Setzt man für die Variablen Zahlen ein, erhält man eine Zahl als Rechenergebnis. Für gleiche Variablen müssen gleiche Zahlen eingesetzt werden.

Auch zusammengesetzte Terme sind Summen, Differenzen, Produkte oder Quotienten. Über die Art entscheidet die Rechenoperation, die als letzte auszuführen ist.

Beispiele: $3 \cdot a + b$ ist eine Summe
$(4 + 2 \cdot x) \cdot (3 \cdot y - 7)$ ist ein Produkt

Vereinbarungen:

- Das Multiplikationszeichen in Termen lässt man weg, außer zwischen Zahlen.
  Beispiele: $3 \cdot x = 3x$
  $5 \cdot (a + b) \cdot (4 - a) = 5\,(a + b)\,(4 - a)$
  $2 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 5\,ab = 10\,ab$
- In Produkten schreibt man zuerst die Zahlen (Koeffizienten) und dann die Variablen in alphabetischer Reihenfolge.
  Beispiel: $c \cdot 3 \cdot a \cdot (-4) \cdot x = 3 \cdot (-4) \cdot a \cdot c \cdot x = -12acx$
- $1 \cdot a = a$ und $-1 \cdot a = -a$

Klammern (Ausmultiplizieren und Ausklammern) / Summe mal Summe

Ausmultiplizieren einer Summe: **Jeder** Summand wird mit dem Faktor multipliziert.	$4x(3y + 2) \underset{\xleftarrow{\text{Ausklammern}}}{\xrightarrow[=]{\text{Ausmultiplizieren}}} 12xy + 8x$	Ausklammern einer Summe: Ein Faktor, der in **allen** Summanden vorkommt, kann ausgeklammert werden.

Wichtig:

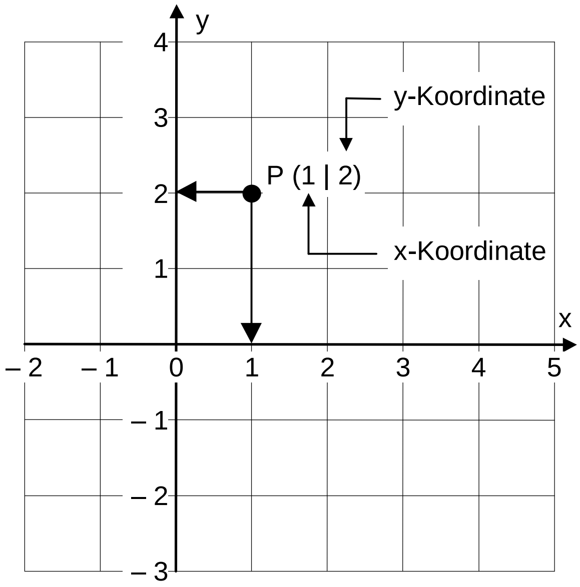
Ein Minuszeichen vor dem Faktor wird beim Ausmultiplizieren sofort berücksichtigt:

$$3a - 2b(5 - 4b) = 3a - 10b + 8b^2$$

Summe mal Summe:	$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$
Beispiel:	$(2a + 5y)\,(9x + 6b) = 18ax + 12ab + 45xy + 30by$
Summe mal Differenz:	$(a + b)\,(c - d) = ac - ad + bc - bd$
Beispiel:	$(3x + 5y)\,(7a - 4y) = 21ax - 12xy + 35ay - 20y^2$

Binomische Formeln	
1. Binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Beispiele: $(3a+5b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2$ $= 9a^2 + 30ab + 25b^2$ $(0{,}4x + 0{,}5y)^2 = 0{,}16x^2 + 0{,}4xy + 0{,}25y^2$
2. Binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Beispiele: $(4a-6b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 6b + (6b)^2$ $= 16a^2 - 48ab + 36b^2$ $(0{,}3m - 0{,}6n)^2 = 0{,}09m^2 - 0{,}36mn + 0{,}36n^2$
3. Binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Beispiele: $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2$ $= 4a^2 - 9b^2$ $(0{,}2x + 0{,}3y)(0{,}2x - 0{,}3y) = 0{,}04x^2 - 0{,}09y^2$

Umformen und Lösen von Gleichungen	
Gleichung:	$-7 + 2(x+8) = \frac{1}{2}(72 - 2x) - 3$
Auf beiden Seiten der Gleichung Klammern auflösen:	$-7 + 2x + 16 = 36 - x - 3$
Beide Seiten der Gleichung • ordnen und anschließend • zusammenfassen (nur Summanden mit **gleichen Variablen** dürfen zusammengefasst werden):	$2x - 7 + 16 = -x + 36 - 3$ $2x + 9 = -x + 33$
Auf beiden Seiten der Gleichung so addieren bzw. subtrahieren, dass auf einer Seite (links) nur ein Vielfaches der Variablen und auf der anderen Seite (rechts) nur eine Zahl steht:	$2x + 9 = -x + 33 \quad \vert +x$ $3x + 9 = 33 \quad \vert -9$ $3x = 24$
Auf beiden Seiten durch den Faktor vor der Variablen dividieren:	$3x = 24 \quad \vert :3$ $x = 8$
Lösung der Gleichung:	$L = \{8\}$

Koordinatensystem	
Ein Koordinatensystem ist festgelegt durch: • die x-Achse (Rechtsachse) und • die y-Achse (Hochachse). Beide Achsen stehen senkrecht zueinander und schneiden sich im Punkt (0 | 0). Dieser Punkt wird auch Koordinatenursprung genannt. Auf beiden Achsen werden die verwendeten Längeneinheiten angegeben. Die x-Koordinate wird auch „Abszisse“ genannt. Die y-Koordinate wird auch „Ordinate“ genannt.	

Lineare Funktionen (zeichnen)

Der Graph einer linearen Funktion $y = mx + b$ ist eine Gerade.

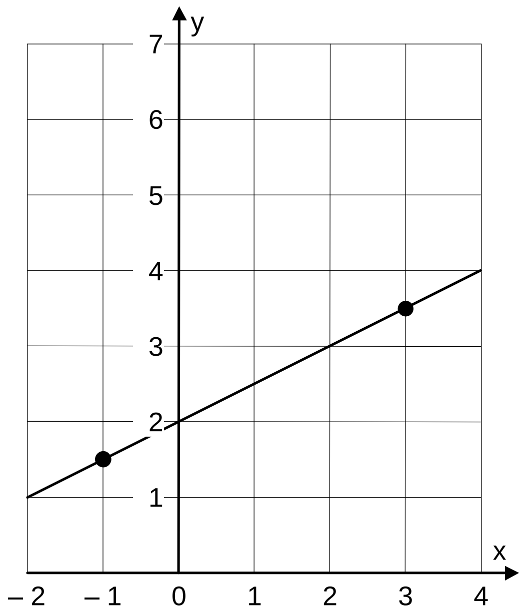
m heißt „Steigung“;
- $m > 0$: die Gerade steigt
- $m = 0$: die Gerade verläuft parallel zur x-Achse
- $m < 0$: die Gerade fällt

b heißt „y-Achsenabschnitt“; Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse bei (0 | b)

gegeben: Funktionsgleichung $y = 0{,}5\,x + 2$

gesucht: Graph der Funktion

x	y = 0,5 x + 2
– 1	$0{,}5 \cdot (-1) + 2 = 1{,}5$
3	$0{,}5 \cdot 3 + 2 = 3{,}5$



Lineare Funktionen (Funktionsgleichung bestimmen)

gegeben: Graph der Funktion durch die Punkte A (– 2 | 1) und B (1 | – 5)

gesucht: Funktionsgleichung

1. Schritt: Steigung m berechnen

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-5)-(+1)}{(+1)-(-2)} = \frac{-6}{+3} = -2$$

oder

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(+1)-(-5)}{(-2)-(+1)} = \frac{+6}{-3} = -2$$

2. Schritt: y-Abschnitt b berechnen

$y = mx + b \rightarrow b = y - mx$

$b = y_2 - mx_2$

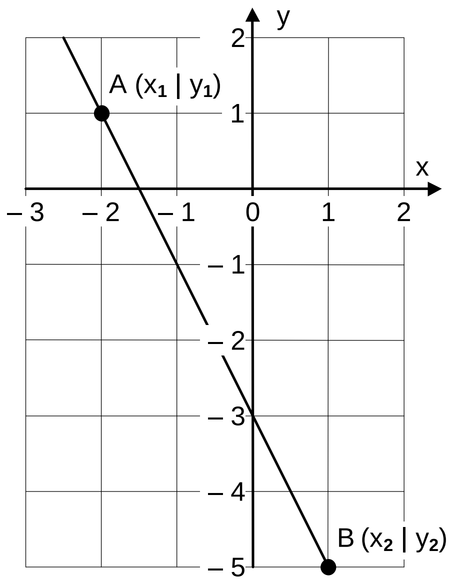
$= -5 - (-2) \cdot 1 = -5 + 2 = -3$

oder

$b = y_1 - mx_1$

$= 1 - (-2) \cdot (-2) = 1 - 4 = -3$

Funktionsgleichung: $y = -2x - 3$



Lineare Gleichungssysteme (Gleichsetzungsverfahren)

gegeben: zwei lineare Funktionsgleichungen

gesucht: Lösung der Funktionsgleichungen (Schnittpunkt der Funktionsgraphen)

Gleichsetzungsverfahren

$y_1 = -x + 5$ und $y_2 = 0{,}5x + 2$

Im Schnittpunkt S gilt:

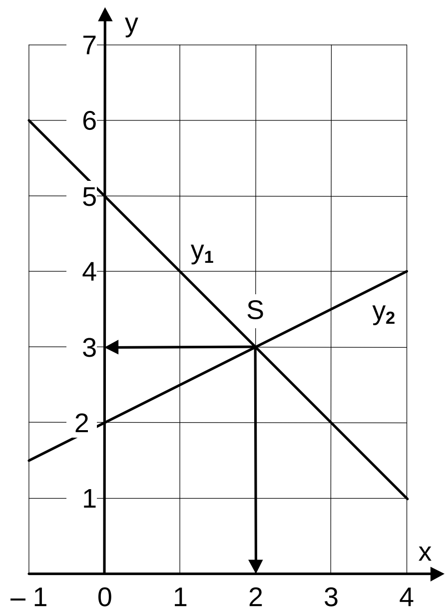
NR:
$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ -x + 5 &= 0{,}5x + 2 \quad &| -0{,}5x \\ -1{,}5x + 5 &= 2 \quad &| -5 \\ -1{,}5x &= -3 \quad &| : (-1{,}5) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2 für x in y_1 oder y_2 einsetzen:

$y_1 = -x + 5 = -2 + 5 = 3$ oder

$y_2 = 0{,}5x + 2 = 0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1 + 2 = 3$

Man erhält den Schnittpunkt S(2 | 3).



Lineare Gleichungssysteme (Additionsverfahren / Subtraktionsverfahren)

Additionsverfahren	**Subtraktionsverfahren**
Die Vorzahlen (Koeffizienten) einer Variablen in beiden Gleichungen müssen den gleichen Betrag aber verschiedene Vorzeichen haben.	Die Vorzahlen (Koeffizienten) einer Variablen in beiden Gleichungen müssen den gleichen Betrag und gleiche Vorzeichen haben.
$2x + 4y = 28 \mid \cdot 3$ $3x + 9y = 57 \mid \cdot (-2)$	$4x - 2y = 6 \mid \cdot 3$ $3x + 6y = -3 \mid \cdot 4$
$6x + 12y = 84 \mid$ Gleichungen $-6x - 18y = -114 \mid$ addieren	$12x - 6y = 18 \mid$ Gleichungen $12x + 24y = -12 \mid$ subtrahieren
$-6y = -30 \mid : (-6)$ $2x + 4y = 28 \mid -4y$	$-30y = 30 \mid : (-30)$ $4x - 2y = 6 \mid +2y$
$y = 5$ $2x = 28 - 4y$	$y = -1$ $4x = 6 + 2y$
5 für y in die 2. Gleichung einsetzen: NR: $2x = 28 - 4 \cdot 5$ $2x = 8 \mid : 2$ $x = 4$	– 1 für y in die 2. Gleichung einsetzen: NR: $4x = 6 + 2 \cdot (-1)$ $4x = 4 \mid : 4$ $x = 1$
$L = \{(4; 5)\}$ Probe nicht vergessen.	$L = \{(1; -1)\}$ Probe nicht vergessen.

Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ heißt „Parabel“.

$a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet.

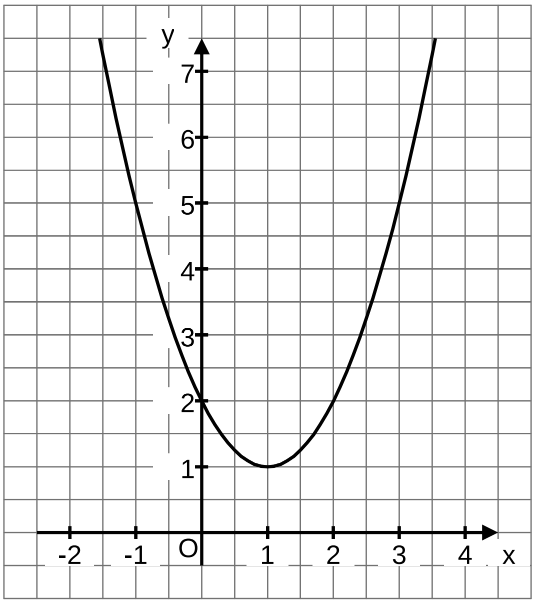
$a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet.

Der höchste bzw. tiefste Punkt einer Parabel heißt „Scheitelpunkt“.

gegeben: Funktionsgleichung $y = x^2 - 2x + 2$

gesucht: Graph der Funktion

x	$y = x^2 - 2x + 2$
-1	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = 5$
0	$0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$
1	$1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$
2	$2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$
3	$3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$



Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (mit $a \neq 0$) heißen gemischt-quadratische Gleichungen. Dividiert man die Gleichung durch a, erhält man die **Normalform** der quad. Gleichung: $x^2 + px + q = 0$ (mit $p = b/a$ und $q = c/a$).

Die Normalform der quadratischen Gleichung ist genau dann lösbar, wenn der Ausdruck $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ (**Diskriminante** genannt) größer oder gleich Null ist.

Beim Lösen der Normalform der quad. Gleichung können drei Fälle auftreten:

$D > 0$:	$D = 0$:	$D < 0$:
Man erhält zwei Lösungen: $L = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right\}$	Man erhält eine Lösung: $L = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$	Man erhält keine Lösung. $L = \{\ \} = \varnothing$
Geometrische Bedeutung: Der Graph der quad. Funktion schneidet die x-Achse zweimal.	Geometrische Bedeutung: Der Graph der quad. Funktion berührt die x-Achse (an einer Stelle).	Geometrische Bedeutung: Der Graph der quad. Funktion schneidet bzw. berührt die x-Achse nicht.

Satz von Vieta (Probe): sind x_1 und x_2 zwei Lösungen einer quad. Gleichung in Normalform, dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Proportionale Zuordnungen / Dreisatz

Eine Zuordnung zwischen zwei Größen heißt (direkt) **proportional**, wenn gilt:

- Multipliziert man die eine Größe mit einer Zahl, so muss auch die andere Größe mit derselben Zahl multipliziert werden.
- Dividiert man die eine Größe durch eine Zahl, so muss auch die andere Größe durch dieselbe Zahl dividiert werden.

doppeltes Gewicht	→	doppelter Preis
halbes Gewicht	→	halber Preis
dreifaches Gewicht	→	dreifacher Preis
ein Drittel Gewicht	→	ein Drittel Preis

3 kg	1,50 €
↓ · 2	↓ · 2
6 kg	3,00 €
6 kg	3,00 €
↓ : 3	↓ : 3
2 kg	1,00 €

Dreisatz bei proportionalen Zuordnungen:

3 kg Äpfel kosten 6,30 €.
Wie viel kosten 7 kg?

3 kg	6,30 €
↓ : 3	↓ : 3
1 kg	2,10 €
↓ · 7	↓ · 7
7 kg	14,70 €

Verhältnisrechnen:

$$\frac{6{,}30€}{3kg} = \frac{x}{7kg} \;\Big|\cdot 7kg \quad ⇨ \quad x = \frac{6{,}30€ \cdot 7kg}{3kg} = 14{,}70€$$

Antiproportionale Zuordnungen / Dreisatz

Eine Zuordnung zwischen zwei Größen heißt **antiproportional** (auch „umgekehrt proportional“), wenn gilt:

- Multipliziert man eine Größe mit einer Zahl, so muss man die andere Größe durch dieselbe Zahl dividieren.
- Dividiert man eine Größe durch eine Zahl, so muss man die andere Größe mit derselben Zahl multiplizieren.

doppelte Geschwindigkeit	→	halbe Zeit
halbe Geschwindigkeit	→	doppelte Zeit
dreifache Geschwindigkeit	→	drittel Zeit
drittel Geschwindigkeit	→	dreifache Zeit

75 km/h	6 h
↓ · 2	↓ : 2
150 km/h	3 h
225 km/h	2 h
↓ : 3	↓ · 3
75 km/h	6 h

Dreisatz bei antiproportionalen Zuordnungen:

3 Kräne entladen ein Schiff in 8 Stunden.
Wie lange brauchen 4 Kräne?

3 Kräne	8 h
↓ : 3	↓ · 3
1 Kran	24 h
↓ · 4	↓ : 4
4 Kräne	6 h

Verhältnisrechnen:

$$3\,\text{Kräne} \cdot 8h = 4\,\text{Kräne} \cdot x \;\Big|:4 \quad ⇨ \quad x = \frac{3\,\text{Kräne} \cdot 8h}{4\,\text{Kräne}} = 6h$$

Zusammengesetzter Dreisatz

Beispiel: 8 Bagger heben in 10 Tagen 2.400 m^3 Erde aus.
Wie lange brauchen 5 Bagger für 2.700 m^3 Erde?

Überlegung	Bagger	Zeit [Tage]	Erde [m^3]
Gefragt ist nach der Zeit.	8	10	2.400
Anzahl Bagger → Zeit: antiproportional	↓ : 8	↓ · 8	
	1	80	2.400
	↓ · 5	↓ : 5	
	5	16	2.400
m^3 Erde → Zeit: proportional		↓ : 8	↓ : 8
	5	2	300
		↓ · 9	↓ · 9
Rechnung: 5 Bagger brauchen 18 Tage für 2.700 m^3.	5	18	2.700

Prozent / Prozentrechnung / Promille

„Prozent" bedeutet „**Hundertstel**". 25 % ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{25}{100}$.

1 %	=	$\frac{1}{100}$	=			0,01		25 %	=	$\frac{25}{100}$	=	$\frac{1}{4}$	=	0,25
5 %	=	$\frac{5}{100}$	=	$\frac{1}{20}$	=	0,05		50 %	=	$\frac{50}{100}$	=	$\frac{1}{2}$	=	0,5
10 %	=	$\frac{10}{100}$	=	$\frac{1}{10}$	=	0,1		75 %	=	$\frac{75}{100}$	=	$\frac{3}{4}$	=	0,75
20 %	=	$\frac{20}{100}$	=	$\frac{1}{5}$	=	0,2		100 %	=	$\frac{100}{100}$	=			1

Der Grundwert G ist das Ganze. Der Prozentsatz p % gibt an, welcher Bruchteil vom Ganzen zu bilden ist. Der Prozentwert P gibt an, wie groß dieser Teil ist.

$$\underbrace{25\,\%}_{\text{Prozentsatz p \%}} \text{ von } \underbrace{32 \text{ Schülern}}_{\text{Grundwert G}} = \underbrace{8 \text{ Schüler}}_{\text{Prozentwert P}}$$

„Promille" bedeutet „**Tausendstel**". 6 ‰ ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{6}{1000}$.

Prozentwert berechnen

Sind der Grundwert G und der Prozentsatz p % gegeben, so lässt sich daraus der Prozentwert P berechnen.

Beispiel: Ein Mantel zu 180 € wird um 40 % reduziert.
Wie hoch ist der Preisnachlass?

gegeben: Grundwert G = 180 €
Prozentsatz p % = 40 %

gesucht: Prozentwert P = ? €

1. Lösungsweg: Dreisatz

100 %	180 €
↓ : 100	↓ : 100
1 %	1,80 €
↓ · 40	↓ · 40
40 %	72 €

2. Lösungsweg: Formel

$$P = G \cdot \frac{p}{100} = 180\ € \cdot \frac{40}{100} = 72\ €$$

Prozentsatz berechnen

Sind der Grundwert G und der Prozentwert P gegeben, so lässt sich daraus der Prozentsatz p % berechnen.

Beispiel: Ein Mantel zu 125 € wird um 50 € reduziert.
Wie viel Prozent beträgt der Preisnachlass?

gegeben: Grundwert G = 125 €
Prozentwert P = 50 €

gesucht: Prozentsatz p % = ? %

1. Lösungsweg: Dreisatz

125 €	100 %
↓ : 125	↓ : 125
1 €	0,80 %
↓ · 50	↓ · 50
50 €	40 %

2. Lösungsweg: Formel

$$p = 100 \cdot \frac{P}{G} = 100 \cdot \frac{50\ €}{125\ €} = 40$$

Grundwert berechnen

Sind der Prozentwert P und der Prozentsatz p % gegeben, so lässt sich daraus der Grundwert G berechnen.

Beispiel: Ein Mantel wird um 40 % reduziert und kostet danach 96 € weniger. Wie teuer war er ursprünglich?

gegeben: Prozentwert P = 96 €
Prozentsatz p % = 40 %

gesucht: Grundwert G = ? €

1. Lösungsweg: Dreisatz

40 %	96 €
↓ : 40	↓ : 40
1 %	2,40 €
↓ · 100	↓ · 100
100 %	240 €

2. Lösungsweg: Formel

$$G = P \cdot \frac{100}{p} = 96\text{ €} \cdot \frac{100}{40} = 240\text{ €}$$

Vermehrter Grundwert / Verminderter Grundwert

200 € zuzüglich 15 %
15 % von 200 € = 30 €

Grundwert G	200 €
+ Prozentwert P	+ 30 €
vermehrter Grundwert	230 €

Zunahmefaktor

$$\text{vermehrter Grundwert} = G + P$$
$$= G + \left(G \cdot \frac{p}{100}\right)$$
$$= G \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{\text{Zunahme-faktor}}$$

Beispiel:

750 € zuzüglich 7,5 %
750 € · (1 + 0,075)
= 750 € · 1,075 = 806,25 €

300 € abzüglich 35 %
35 % von 300 € = 105 €

Grundwert G	300 €
– Prozentwert P	– 105 €
verminderter Grundwert	195 €

Abnahmefaktor

$$\text{verminderter Grundwert} = G - P$$
$$= G - \left(G \cdot \frac{p}{100}\right)$$
$$= G \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{p}{100}\right)}_{\text{Abnahme-faktor}}$$

Beispiel:

300 € abzüglich 20 %
300 € · (1 – 0,2)
= 300 € · 0,8 = 240 €

Zinsrechnung (Laufzeit ≤ 1Jahr)

Das Kapital K ist der verliehene oder ausgeliehene Geldbetrag. Die Jahreszinsen Z sind die Leihgebühr für ein Jahr. Der Zinssatz p % legt fest, wie viel Prozent des Kapitals die Jahreszinsen betragen.

$$\underbrace{8\,\%}_{\text{Zinssatz } p\,\%} \quad \text{von} \quad \underbrace{10.000\text{ €}}_{\text{Kapital } K} \quad = \quad \underbrace{800\text{ €}}_{\text{Zinsen } Z}$$

Jahreszinsen (i = Bruchteil eines Jahres) $Z = K \cdot i \cdot \frac{p}{100}$ („Kip"-Regel)

Monatszinsen (m = Zeit in Monaten) $Z_m = K \cdot \frac{m}{12} \cdot \frac{p}{100}$

Tageszinsen (t = Zeit in Tagen) $Z_t = K \cdot \frac{t}{360} \cdot \frac{p}{100}$

Die Zeit, während der ein Kapital ausgeliehen oder verliehen wird, nennt man „Laufzeit".

Im Bankwesen gilt: Ein Monat hat 30 Tage. Ein Jahr hat 360 Tage.

Jahreszinsen berechnen (Laufzeit = 1Jahr !)

Sind das Kapital K und der Zinssatz p % gegeben, so lassen sich daraus die Jahreszinsen Z berechnen.

Beispiel: Ein Darlehen von 10.000 € wird mit 7,5 % verzinst.
Wie hoch sind die Jahreszinsen?

gegeben: Kapital K = 10.000 €
Zinssatz p % = 7,5 %

gesucht: Jahreszinsen Z = ? €

1. Lösungsweg: Dreisatz

100 %	10.000 €
↓ : 100	↓ : 100
1 %	100 €
↓ · 7,5	↓ · 7,5
7,5 %	750 €

2. Lösungsweg: Formel

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} = 10.000\text{ €} \cdot \frac{7,5}{100} = 750\text{ €}$$

Zinssatz berechnen (Laufzeit = 1Jahr !)

Sind das Kapital K und die Jahreszinsen Z gegeben, so lässt sich daraus der Zinssatz p % berechnen.

Beispiel: Für ein Darlehen von 20.000 € betragen die Jahreszinsen 1.400 €.
Wie hoch ist der Zinssatz?

gegeben: Kapital K = 20.000 €
Jahreszinsen Z = 1.400 €

gesucht: Zinssatz p % = ? %

1. Lösungsweg: Dreisatz

20.000 €	100 %
↓ : 20.000	↓ : 20.000
1 €	0,005 %
↓ · 1.400	↓ · 1.400
1.400 €	7 %

2. Lösungsweg: Formel

$$p = 100 \cdot \frac{Z}{K} = 100 \cdot \frac{1.400\ €}{20.000\ €} = 7$$

Kapital berechnen (Laufzeit = 1Jahr !)

Sind die Jahreszinsen Z und der Zinssatz p % gegeben, so lässt sich daraus das Kapital K berechnen.

Beispiel: Für ein Darlehen zu 8 % sind 800 € Jahreszinsen zu zahlen.
Wie hoch ist das Darlehen?

gegeben: Jahreszinsen Z = 800 €
Zinssatz p % = 8 %

gesucht: Kapital K = ? €

1. Lösungsweg: Dreisatz

8 %	800 €
↓ : 8	↓ : 8
1 %	100 €
↓ · 100	↓ · 100
100 %	10.000 €

2. Lösungsweg: Formel

$$K = Z \cdot \frac{100}{p} = 800\ € \cdot \frac{100}{8} = 10.000\ €$$

Zinsen berechnen (Laufzeit ≤ 1Jahr / in Tagen !)							
gegeben: Kapital K = 7.200 € Zinssatz p % = 3 % Laufzeit t = 140 Tage gesucht: Zinsen Z = ? €							
1. Lösungsweg: Dreisatz							
1. Lösungsschritt Jahreszinsen berechnen				2. Lösungsschritt Zinsen für 140 Tage berechnen			
	100 % ↓ : 100 1 % ↓ · 3 3 %	7.200 € ↓ : 100 72 € ↓ · 3 216 €			360 Tage ↓ : 360 1 Tag ↓ · 140 140 Tage	216 € ↓ : 360 0,60 € ↓ · 140 84 €	
2. Lösungsweg: Formel $Z_t = K \cdot \frac{t}{360} \cdot \frac{p}{100} = 7.200\ € \cdot \frac{140}{360} \cdot \frac{3}{100} = 84\ €$							

Kapital berechnen (Laufzeit ≤ 1Jahr / in Tagen !)							
gegeben: Zinsen Z = 102 € Zinssatz p % = 4,5 % Laufzeit t = 85 Tage gesucht: Kapital K = ? €							
1. Lösungsweg: Dreisatz							
1. Lösungsschritt Jahreszinsen berechnen				2. Lösungsschritt Kapital berechnen			
	85 Tage ↓ : 85 1 Tag ↓ · 360 360 Tage	102 € ↓ : 85 1,20 € ↓ · 360 432 €			4,5 % ↓ : 4,5 1 % ↓ · 100 100 %	432 € ↓ : 4,5 96 € ↓ · 100 9.600 €	
2. Lösungsweg: Formel $K = Z_t \cdot \frac{360}{t} \cdot \frac{100}{p} = 102\ € \cdot \frac{360}{85} \cdot \frac{100}{4,5} = 9.600\ €$							

Zinssatz berechnen (Laufzeit ≤ 1Jahr / in Tagen !)

gegeben: Kapital K = 20.000 €
Zinsen Z = 100 €
Laufzeit t = 40 Tage
gesucht: Zinssatz p % = ? %

1. Lösungsweg: Dreisatz

1. Lösungsschritt Jahreszinsen berechnen		2. Lösungsschritt Zinssatz berechnen	
40 Tage	100 €	20.000 €	100 %
↓ : 40	↓ : 40	↓ : 20.000	↓ : 20.000
1 Tag	2,50 €	1 €	0,005 %
↓ · 360	↓ · 360	↓ · 900	↓ · 900
360 Tage	900 €	900 €	4,5 %

2. Lösungsweg: Formel

$$p = Z_t \cdot \frac{360}{t} \cdot \frac{100}{K} = 100\ € \cdot \frac{360}{40} \cdot \frac{100}{20.000\ €} = 4{,}5$$

Laufzeit berechnen (Laufzeit ≤ 1Jahr / in Tagen !)

gegeben: Kapital K = 18.000 €
Zinssatz p % = 5 %
Zinsen Z = 125 €
gesucht: Laufzeit t = ? Tage

1. Lösungsweg: Dreisatz

1. Lösungsschritt Jahreszinsen berechnen		2. Lösungsschritt Laufzeit berechnen	
100 %	18.000 €	900 €	360 Tage
↓ : 100	↓ : 100	↓ : 900	↓ : 900
1 %	180 €	1 €	0,4 Tage
↓ · 5	↓ · 5	↓ · 125	↓ · 125
5 %	900 €	125 €	50 Tage

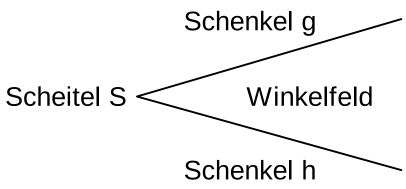
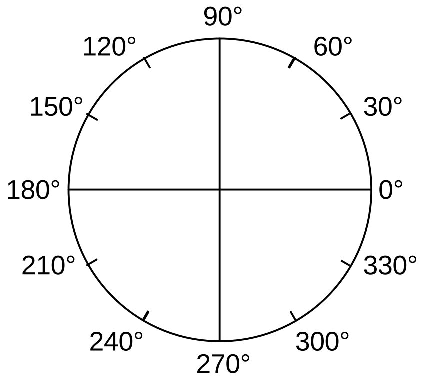
2. Lösungsweg: Formel

$$t = Z_t \cdot \frac{360}{p} \cdot \frac{100}{K} = 125\ € \cdot \frac{360}{5} \cdot \frac{100}{18.000\ €} = 50$$

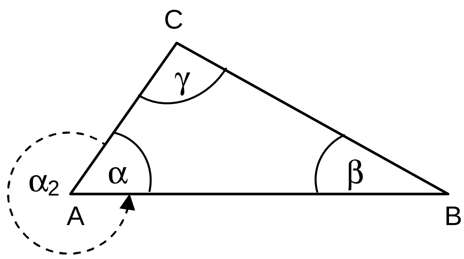
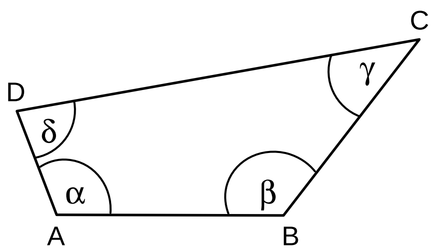
Exponentielle Zunahme (z.B. Zinseszinsrechnung: Laufzeit beträgt mehrere Jahre !)	
Bei konstanter Zunahme um p % wächst eine Größe G_0 nach n Zeitspannen auf die Größe G_n, wobei gilt: $G_n = G_0 \cdot q^n$ oder $G_n = G_0 \cdot (1 + p\,\%)^n$ G_0: Anfangsgröße p %: prozentuale Zunahme q: Wachstums- oder Zunahmefaktor = 1 + p % n: Zahl der Zunahmeschritte (Anzahl der gleichen Zeitspannen) G_n: Endgröße nach n Zunahmeschritten bzw. nach n Zeitspannen	Beispiel: **Zinseszinsrechnung** Ein Kapital von 20.000 € wird für 15 Jahre fest angelegt und jährlich mit 5 % verzinst. Über welchen Betrag kann man nach 15 Jahren verfügen? K_0: 20.000 € (Anfangskapital) p %: 5 % n: 15 Jahre $K_{15} = 20.000\text{ €} \cdot (1 + 5\,\%)^{15}$ $= 20.000\text{ €} \cdot (1 + 0{,}05)^{15}$ $= 20.000\text{ €} \cdot 1{,}05^{15}$ $= 20.000\text{ €} \cdot 2{,}078928$ $= 41.578{,}56\text{ €}$

Exponentielle Abnahme	
Bei konstanter Abnahme um p % vermindert sich eine Größe G_0 nach n Zeitspannen auf die Größe G_n, wobei gilt: $G_n = G_0 \cdot q^n$ oder $G_n = G_0 \cdot (1 - p\,\%)^n$ G_0: Anfangsgröße p %: prozentuale Abnahme q: Wachstums- oder Abnahmefaktor = 1 – p % n: Zahl der Abnahmeschritte (Anzahl der gleichen Zeitspannen) G_n: Endgröße nach n Abnahmeschritten bzw. nach n Zeitspannen	Beispiel: Ein Stahlblock wurde zur Bearbeitung auf eine Temperatur von 950 °C erhitzt. Die Temperatur dieses Blockes nimmt pro Stunde um etwa 18 % ab. Welche Temperatur besitzt der Stahlblock noch nach acht Stunden? T_0: 950 °C (Anfangstemperatur) p %: 18 % n: 8 Stunden $T_8 = 950\,°\text{C} \cdot (1 - 18\,\%)^8$ $= 950\,°\text{C} \cdot (1 - 0{,}18)^8$ $= 950\,°\text{C} \cdot 0{,}82^8$ $= 950\,°\text{C} \cdot 0{,}2044$ $= 194{,}2\,°\text{C}$

Winkel / Winkelbezeichnungen

 	
Winkelbezeichnungen: α alpha β beta γ gamma δ delta ε epsilon	$0°$ Nullwinkel $0° < \alpha < 90°$ spitzer Winkel $90°$ rechter Winkel $90° < \alpha < 180°$ stumpfer Winkel $180°$ gestreckter Winkel $180° < \alpha < 360°$ überstumpfer Winkel $360°$ Vollwinkel

Winkelsummen

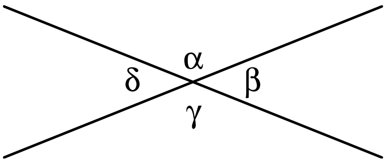
Winkelsumme im Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$	 $\alpha = \sphericalangle BAC$; $\beta = \sphericalangle CBA$ $\alpha_2 = \sphericalangle CAB$ (gegen den Uhrzeigersinn)
Winkelsumme im Viereck: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$	
Winkelsumme im n-Eck: $(n - 2) \cdot 180°$	

Scheitelwinkel / Nebenwinkel

Scheitelwinkel

Beim Schnitt zweier Geraden gilt:

Zwei gegenüberliegende Winkel heißen Scheitelwinkel; sie sind jeweils gleich groß.



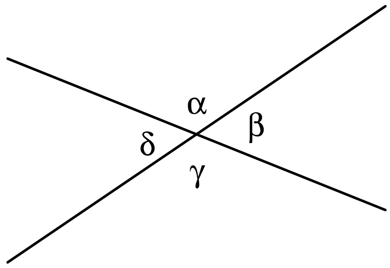
Scheitelwinkel:

$$\alpha = \gamma$$
$$\beta = \delta$$

Nebenwinkel

Beim Schnitt zweier Geraden gilt:

Zwei nebeneinanderliegende Winkel heißen Nebenwinkel; ihre Summe beträgt immer 180°.



Nebenwinkel:

$\alpha + \beta = 180°$ $\quad$ $\beta + \gamma = 180°$

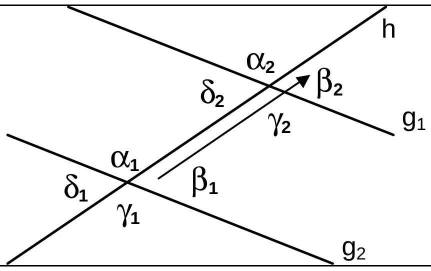
$\gamma + \delta = 180°$ $\quad$ $\alpha + \delta = 180°$

Stufenwinkel / Wechselwinkel

Stufenwinkel

An parallelen Geraden sind Stufenwinkel jeweils gleich groß.
An nicht parallelen Geraden ist das nicht so.

$g_1 \parallel g_2$



Stufenwinkel:

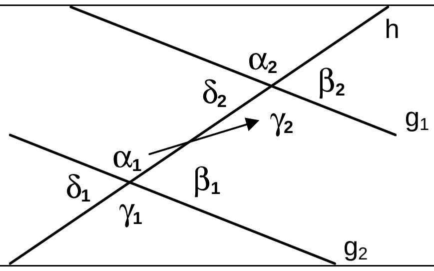
$\alpha_1 = \alpha_2$ $\quad$ $\beta_1 = \beta_2$

$\gamma_1 = \gamma_2$ $\quad$ $\delta_1 = \delta_2$

Wechselwinkel

An parallelen Geraden sind Wechselwinkel jeweils gleich groß.
An nicht parallelen Geraden ist das nicht so.

$g_1 \parallel g_2$



Wechselwinkel:

$\alpha_1 = \gamma_2$ $\quad$ $\beta_1 = \delta_2$

$\gamma_1 = \alpha_2$ $\quad$ $\delta_1 = \beta_2$

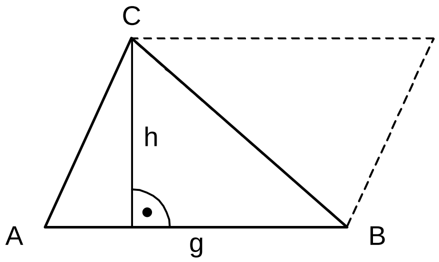
Beispiel: $\alpha_1 \overset{\text{Scheitelwinkel}}{=} \gamma_1 \overset{\text{Stufenwinkel}}{=} \gamma_2$

Dreieck

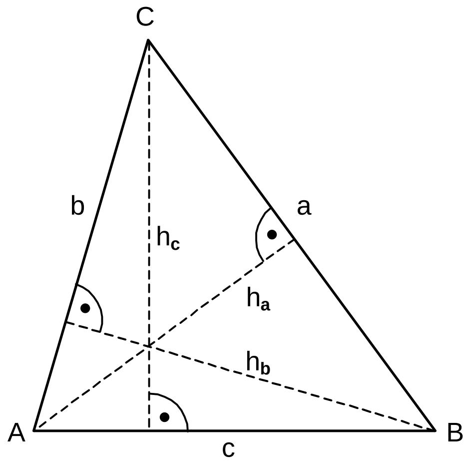
Dreieck

Umfang (u): $u = a + b + c$

Ein Dreieck ist ein „halbes“ Parallelogramm.



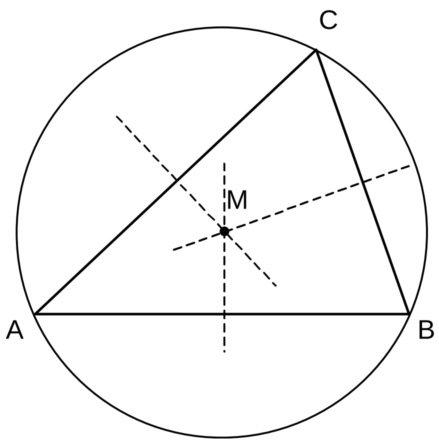
Flächeninhalt (A): $A = \frac{g \cdot h}{2}$



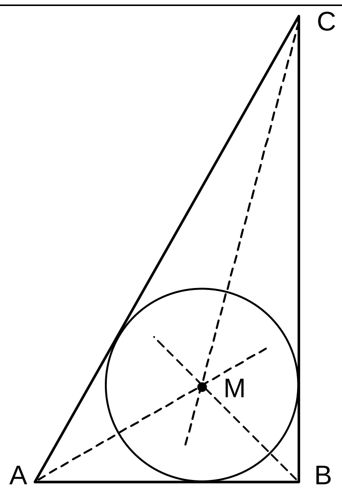
$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

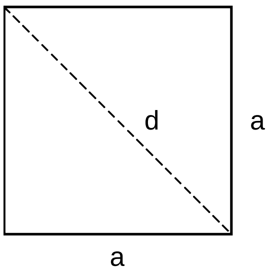
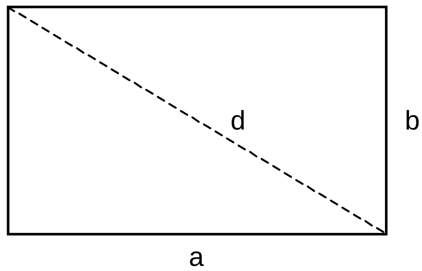
Umkreis / Inkreis

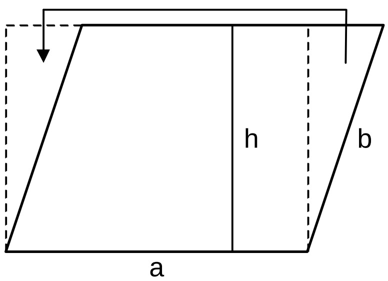
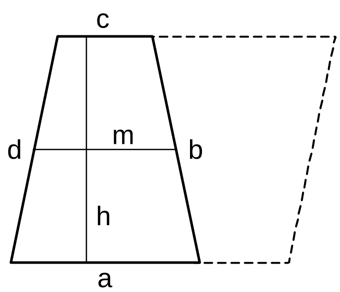
In jedem Dreieck schneiden sich die **Mittelsenkrechten** der drei Seiten in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.



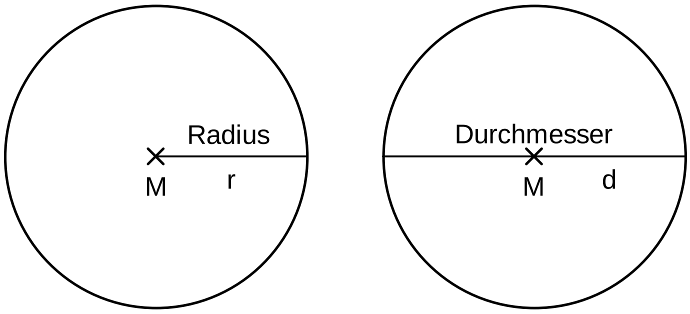
In jedem Dreieck schneiden sich die drei **Winkelhalbierenden** in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises.



Quadrat / Rechteck	
Quadrat	**Rechteck**
	
$u = 4 \cdot a$	$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$
$A = a \cdot a = a^2$	$A = a \cdot b$
$d = a \cdot \sqrt{2}$ (Flächendiagonale)	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Flächendiagonale)

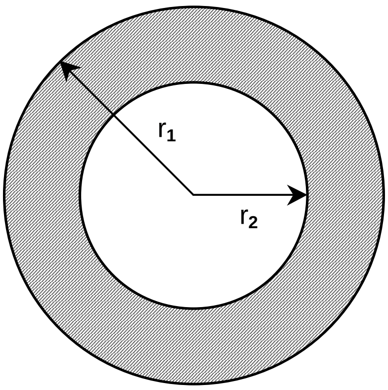
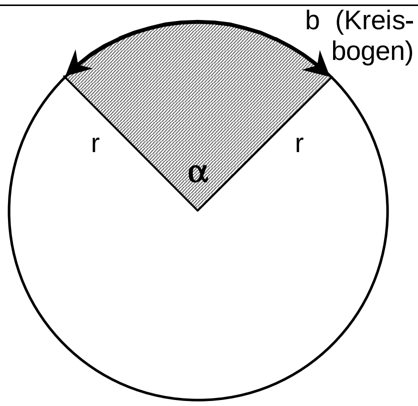
Parallelogramm / Trapez	
Parallelogramm	**Trapez**
	
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$ Ein Parallelogramm kann in ein gleich großes Rechteck umgewandelt werden. $A = a \cdot h$	$u = a + b + c + d$ Ein Trapez ist ein „halbes“ Parallelogramm. $A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} = \frac{a + c}{2} \cdot h = m \cdot h$

Kreis

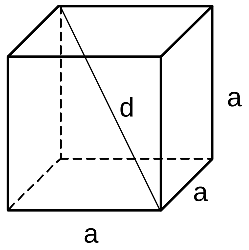
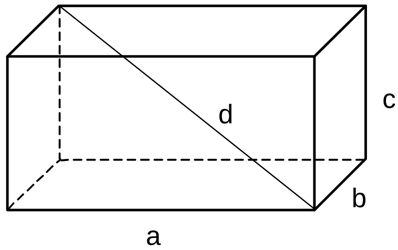


$d = 2 \cdot r$	$r = \frac{d}{2}$
$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$	$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
$u = 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi$	$r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$

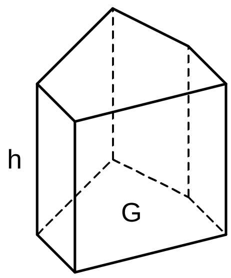
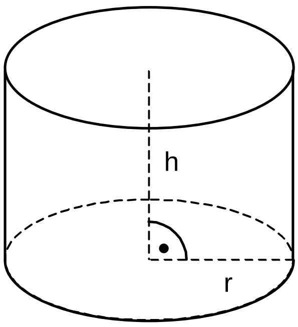
Kreisring / Kreisausschnitt (Sektor)

Kreisring	**Kreisausschnitt (Sektor)**
	
$A = \pi \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right)$ $u = 2 \cdot \pi \cdot \left(r_1 + r_2\right)$	$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Würfel / Quader

Würfel	**Quader**
	
Volumen (V): $V = a \cdot a \cdot a = a^3$	$V = a \cdot b \cdot c$
Mantelfläche (M): $M = 4 \cdot a^2$	$M = 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot c)$
Oberfläche (O): $O = 6 \cdot a^2$	$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
$d = a \cdot \sqrt{3}$ (Raumdiagonale)	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Raumdiagonale)

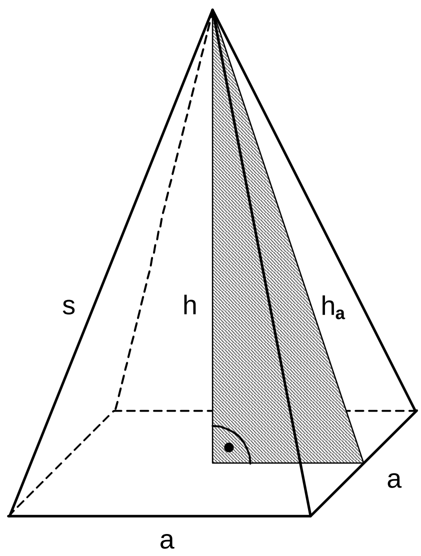
Prisma / Zylinder

Prisma	**Zylinder**
	
$V = G \cdot h$ (Grundfläche · Höhe) $M = u \cdot h$ $O = 2 \cdot G + M$	$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$ $M = u \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ $O = 2 \cdot G + M$ $= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ $= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

Quadratische Pyramide

Quadratische Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$
$$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$$
$$= 2 \cdot a \cdot h_a$$
$$O = G + M$$
$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$
$$h_a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$
$$s = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$



Regelmäßige Pyramide

Regelmäßige Pyramide

Eine regelmäßige Pyramide besteht in der Grundfläche aus n gleichschenkligen Dreiecken.

Der Mittelpunktswinkel ε beträgt: $\varepsilon = \frac{360°}{n}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a\right) \cdot h$$

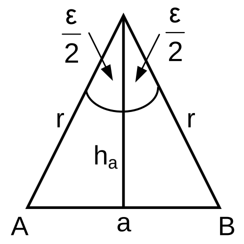
n = Anzahl der Seiten

$$M = n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$
$$O = G + M$$
$$= n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

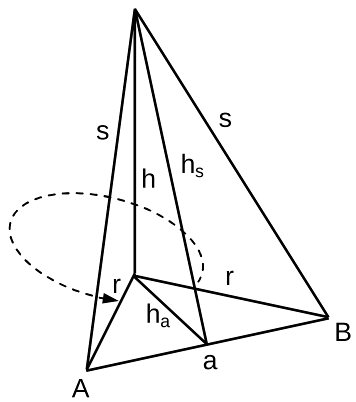
weiter gilt:

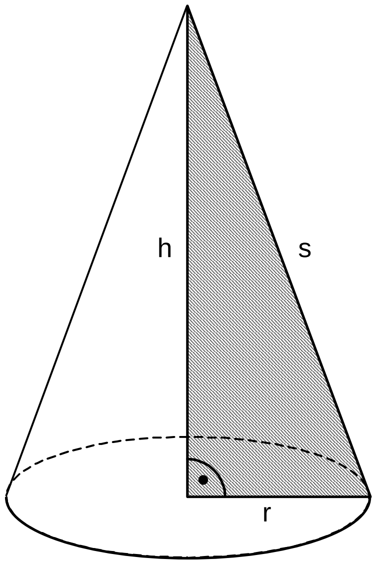
$$s = \sqrt{{h_s}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$h_s = \sqrt{h^2 + {h_a}^2}$$

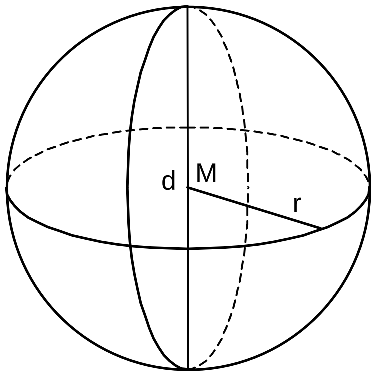
Teilansicht der Grundfläche:



Teilansicht der Pyramide:



Kegel	
Kegel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ $\quad = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ $M = \pi \cdot r \cdot s$ $O = G + M$ $\quad = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$ $\quad = r \cdot \pi \cdot (r + s)$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$	

Kugel	
Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{1}{6} \cdot d^3 \cdot \pi$ $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$ $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = d^2 \cdot \pi$ $r = \sqrt{\frac{O}{4 \cdot \pi}}$	

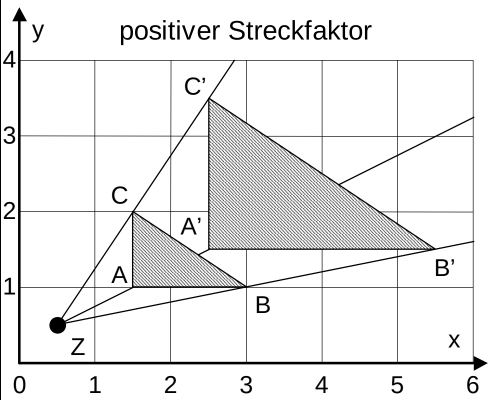
Zentrische Streckungen

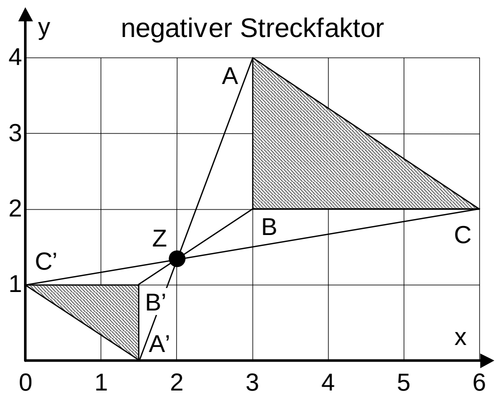
Bei den zentrischen Streckungen handelt es sich um maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern. Alle Winkelgrößen bleiben dabei erhalten, d. h. die Form der Figur ändert sich nicht.

Für Strecken gilt:	$\frac{\text{vergrößerte / verkleinerte Strecke}}{\text{Originalstrecke}}$	= k (Streckfaktor)
oder		
	vergrößerte / verkleinerte Strecke	= k · Originalstrecke
Für Flächen gilt:	$\frac{\text{vergrößerte / verkleinerte Fläche}}{\text{Originalfläche}}$	$= k^2$
oder		
	vergrößerte / verkleinerte Fläche	$= k^2 \cdot$ Originalfläche

positiver Streckfaktor		negativer Streckfaktor	
$0 < k < 1$:	die Figur wird verkleinert.	$-1 < k < 0$:	die Figur wird verkleinert und um 180° um das Zentrum Z gedreht.
$k > 1$:	die Figur wird vergrößert.	$k < -1$:	die Figur wird vergrößert und um 180° um das Zentrum Z gedreht.

Zentrische Streckungen



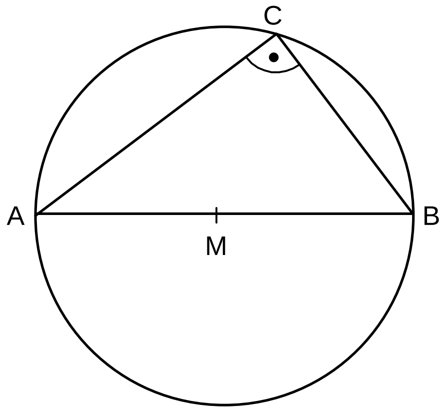


Im Beispiel gilt:	Im Beispiel gilt:
$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC'}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k = 2$	$k = -0{,}5 = -\frac{1}{2}$
$A' = k^2 \cdot A = 2^2 \cdot A = 4 \cdot A$	$A' = k^2 \cdot A = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A$

Thalessatz / Satz des Pythagoras

Thalessatz

Wenn $\overline{AB}$ Durchmesser eines Kreises ist und C auf diesem Kreis liegt, dann ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig.

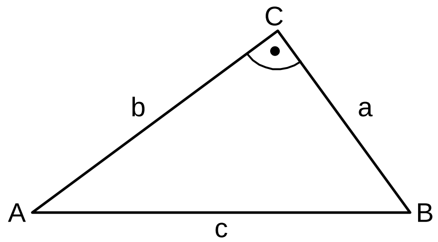


In einem **rechtwinkligen** Dreieck nennt man die längste Seite „Hypotenuse". Sie liegt immer dem rechten Winkel gegenüber. Die beiden anderen Seiten nennt man „Katheten".

Satz des Pythagoras

Die Summe der beiden Kathetenquadrate ergibt das Hypotenusenquadrat.

Im Beispiel gilt: $a^2 + b^2 = c^2 \; (\gamma = 90°)$

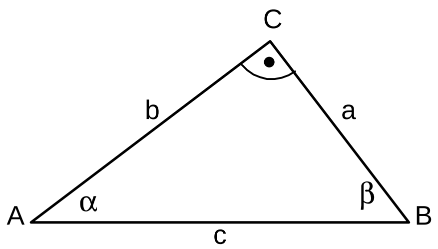


Sinus / Kosinus / Tangens

Hypotenuse:
längste Seite in einem rechtwinkligen Dreieck (liegt immer dem rechten Winkel gegenüber).

Gegenkathete eines Winkels:
Seite, die dem Winkel gegenüberliegt.

Ankathete eines Winkels:
Seite, die am Winkel anliegt (jedoch nicht die Hypotenuse).



Winkelfunktionen am **rechtwinkligen** Dreieck:	Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen:
$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ für $\cos \alpha \neq 0$ $\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$ $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$

Sinussatz / Kosinussatz

Sinussatz (für beliebige Dreiecke):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder

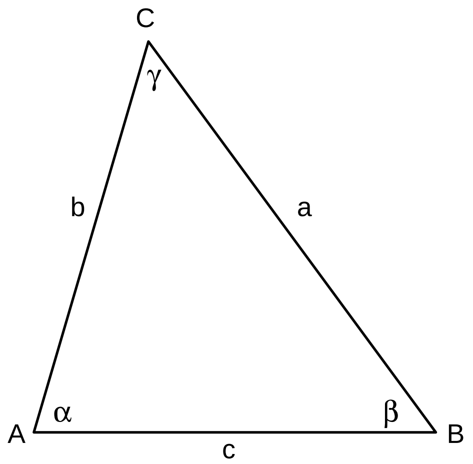
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Kosinussatz (für beliebige Dreiecke):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$	$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$	$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

Fibonacci - Zahlen

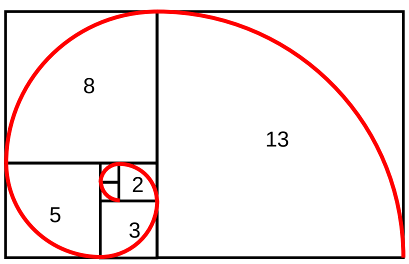
Die Erfindung der **Fibonacci - Zahlen** wird dem italienischen Mathematiker Leonarda von Pisa, der besser unter dem Namen Fibonacci, der Kurzform von Filius Bonacci, bekannt ist, zugeschrieben.

$F_0=0$, $F_1=1$ und $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$

F_n (n in $\mathbb{N}$) heißen **"Fibonacci-Zahlen"**

Die ersten Fibonacci-Zahlen sind also:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …



Fibonacci - Spirale: (siehe Abb. Links)

Wir beginnen mit zwei Quadraten mit der Seitenlänge 1. Zusammen bilden sie ein Rechteck. Über der längeren Seite des Rechtecks setzen wir ein Quadrat. dessen Seitenlänge gerade die längere Rechteckseite ist. Mit dem Uhrzeigersinn setzen wir das Verfahren fort. Notieren wir die Folge der Quadratseitenlängen erhalten wir 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21, … Wenn man die jeweiligen Quadrate mit einem Viertelkreis füllt, dessen Radius gerade die Seitenlänge des jeweiligen Quadrates ist entsteht die Fibonacci-Spirale. Diese Struktur findet sich z.B. bei Schalen von Schnecken, Anordnung der Sonnenblumenkerne, Aufbau von Fichtenzapfen, …